Las soluciones que presentaré no son las únicas soluciones: puede haber más de una manera de resolver los ejercicios. Sin embargo, es muy ilustrativo (y una buena costumbre académica) presentar las soluciones más efectivas, eficientes y económicas. Aquí presentaré las soluciones más directa confiando en que sean también las adecuadas pedagógicamente.

1. (a) Una manera válida de demostrar que f es lineal es demostrando que cumple las condiciones de la definición:

    i) respeta la suma

    ii) respeta la multiplicación escalar.

Presentaré una solución más directa basada en que si A es una matriz, entonces $f(\bar{x}) = A\bar{x}$ es una aplicación lineal.

Obseve que

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 5x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Como f es de la forma $A\bar{x}$, sabemos entonces que es lineal.

(b) Igual que en el apartado anterior, podemos demostrar que f es lineal recurriendo a la definición o también observando que f es de la forma $A\bar{x}$:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, f es una aplicación lineal.

(c) No es inmediatamente claro que esta función no es lineal, pero sospechamos que no lo es porque no tiene forma matricial evidente.

Cuando queremos demostrar que una aplicación no es lineal, nuestro primer esfuerzo debe estar dirigido a justificar <u>una</u> de la siguientes situaciones:

i) f no respeta la suma

ii) f no respeta la multiplición escalar

iii) $f(\bar{0}) \neq \bar{0}$.

La última situación es la más evidente: $f(\bar{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto f no es lineal.

d) En este caso, f no tiene forma matricial evidente. Tampoco tenemos razón para pensar que no es lineal. Procedemos a verificar que f cumple la definición de aplicación lineal.

Primero comprobamos que f respeta la suma:

Tomamos dos polinomios arbitrarios en $\mathbb{P}_2$, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.

▸ $p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2$.

▶ $f(p(t)+q(t)) = 2(a_0+b_0)+(a_1+b_1)$
$+(a_2+b_2-a_1-b_1)t$

$= 2a_0+a_1+(a_2-a_1)t+2b_0+b_1+(b_2-b_1)t$

$= f(p(t))+f(q(t)).$

Entonces f respeta la suma

Ahora comprobamos que f respeta la multiplicación escalar:

Tomamos un escalar arbitrario α y un polinomio arbitrario en $\mathbb{P}_2$, $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$.

▶ $\alpha p(t) = \alpha a_0+\alpha a_1 t+\alpha a_2 t^2$

▶ $f(\alpha p(t)) = 2\alpha a_0+\alpha a_1+(\alpha a_2-\alpha a_1)t$
$= \alpha(2a_0+a_1+(a_2-a_1)t)$
$= \alpha f(p(t)).$

Entonces f respeta la multiplicación.

Concluimos que f verifica la definición y por tanto es lineal.

(e) La componente $x_1^2+x_2^2$ es una pista de que f no es lineal. Verificamos que no respeta la suma.

Escogemos dos vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^2$: $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ y $\bar{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

- $\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}$
- $f(\bar{x}+\bar{y})=\begin{pmatrix}(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2\\x_2+y_2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}x_1^2+2x_1y_1+y_1^2+x_2^2+2x_2y_2+y_2^2\\x_2+y_2\end{pmatrix}$$

$$=f(\bar{x})+f(\bar{y})+\begin{pmatrix}2(x_1y_1+x_2y_2)\\0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto f no es lineal.

(f) Esta aplicación es lineal. Justificamos esta conclusión comprando que se cumple la definición de aplicación lineal:

- Sean $A, B \in M_{n,n}$ dos matrices.

$$f(A+B) = (A+B) + (A+B)^t$$
$$= A+B + A^t + B^t$$
$$= (A + A^t) + (B + B^t)$$
$$= f(A) + f(B).$$

Por tanto f respeta la suma

- Sea α un escalar y $A \in M_{nn}$ una matriz

$$f(\alpha A) = (\alpha A) + (\alpha A)^t$$
$$= \alpha A + \alpha A^t = \alpha (A + A^t)$$
$$= \alpha f(A)$$

Por tanto f respeta la multiplicación escalar.

2. Se nos pide demostrar que f es lineal. Lo demostraremos comprobando que f respeta la suma y la multiplicación escalar.

- Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \in M$ dos matrices. Entonces

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a+x-(b+y) & (b+y)-(a+x) \\ c+z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Entonces f respeta la suma.

▸ Sea α un escalar y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M$.

$$f\left[\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha b & \alpha b - \alpha a \\ \alpha c & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Entonces f respeta la multiplicación escalar.

Queremos calcular la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$ dada. Observe que como $f: M \to M$ y no se nos indica una segunda base para M, entonces se entiende que se nos pide calcular $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Recuerde que $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ viene dada por

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\left[f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \left[f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \left[f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \right)$$

- $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sean $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_2$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$. La matriz asociada viene dada por

$$M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = \left(\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}_2} \left[f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}_2} \left[f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{E}_2} \right)$$

Observe que no conocemos directamente $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Lo que sí conocemos son los siguientes datos

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

¿Cómo podemos utilizar los los datos para calcular $M_f^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}$? Partiendo de los datos (y después de un poco de esfuerzo) nos damos cuenta que $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y los datos que tenemos son las columnas de

$$M_f^{\varepsilon_2,\mathcal{B}}=\left(\left[f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varepsilon_2}\ \left[f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varepsilon_2}\ \left[f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\varepsilon_2}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

¿Cómo sabemos que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}^3$ y es un conjunto linealmente independiente, por tanto una base.

Recopilando todo: tenemo $M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}}$ y queremos $M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3}$. Así que nos enfrentamos a un problema de cambio de base según el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[\bar{w}]_{\mathcal{E}_2}} \arrow[d, "\underset{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2}{P} = I_2"'] & = & M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}} & {[\bar{v}]_{\mathcal{B}}} \\
& & \boxed{I_2 M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}} \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_3}{P}} \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
{[\bar{w}]_{\mathcal{E}_2}} & = & M_f^{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3} & {[\bar{v}]_{\mathcal{E}_3}} \arrow[uu, "\underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_3}{P}"']
\end{tikzcd}$$

Lo más difícil ha sido interpretar el problema: conectar los datos dados con lo que se nos pide. Ahora solo nos queda calcular $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3}{P}$ y $M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{B}} \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3}{P}$.

- $$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3}{P} = \underset{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{B}}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- $$M_f^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4. La matriz que buscamos viene dada por
$M_f^{C,B} = \left([f(\bar{b}_1)]_C \ [f(\bar{b}_2)]_C \ [f(\bar{b}_3)]_C \right)$.

No conocemos $f(\bar{b}_1), f(\bar{b}_2), f(\bar{b}_3)$ pero sí conocemos $f(\bar{b}_1-\bar{b}_3)=\bar{c}_1$, $f(\bar{b}_2-\bar{b}_3)=\bar{c}_1-\bar{c}_2$ y $f(2\bar{b}_3)=2\bar{c}_1+2\bar{c}_3$.

La conexión entre los datos y lo que se nos pide es la siguiente observación:

$\bar{b}_1 = (\bar{b}_1-\bar{b}_3)+\bar{b}_3$

$\bar{b}_2 = (\bar{b}_2-\bar{b}_3)+\bar{b}_3$

$\bar{b}_3 = \frac{1}{2}(2\bar{b}_3)$

Aplicando f a estas tres ecuaciones, por linealidad obtenemos:

- $f(\bar{b}_3) = \frac{1}{2} f(2\bar{b}_3) = \frac{1}{2}(2\bar{c}_1+2\bar{c}_3) = \bar{c}_1+\bar{c}_3$
- $f(\bar{b}_1) = f(\bar{b}_1-\bar{b}_3)+f(\bar{b}_3) = 2\bar{c}_1+\bar{c}_3$
- $f(\bar{b}_2) = f(\bar{b}_2-\bar{b}_3)+f(\bar{b}_3) = 2\bar{c}_1-\bar{c}_2+\bar{c}_3$

Así que

$$M_f^{C,B} = \left([2\bar{c}_1+\bar{c}_3]_C \quad [2\bar{c}_1-\bar{c}_2+\bar{c}_3]_C \quad [\bar{c}_1+\bar{c}_3]_C \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Las columnas pivote de $M_f^{C,B}$ nos dan las <u>coordenadas respecto de C</u> de una base de Im f.

$$M_f^{C,B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las tres columnas son pivote. Cada columna es el vector coordenada respecto de C para los elementos de la base de Imf. Así que la base encontrada es $\{2\bar{c}_1+\bar{c}_3,\ 2\bar{c}_1-\bar{c}_2+\bar{c}_3,\ \bar{c}_1+\bar{c}_3\}$.

(c) Todas las columnas de $M_f^{C,B}$ son pivote y por tanto no hay "variables libres". Es decir, la ecuación $M_f^{C,B}\bar{x}=\bar{0}$ tiene una única solución: la trivial $\bar{x}=\bar{0}$. Es decir $\mathrm{Nuc} f=\{\bar{0}\}$. Como $\dim \mathrm{Nuc} f = 0 = \#$ variables libres, entonces toda base tiene 0 elementos. Es decir, $\mathrm{Nuc} f$ no tiene bases.

5. (a) f tiene representación matricial

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1+x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

por tanto f es lineal.

Calcularemos su imagen y nucleo encontrando una base para cada uno.

- Una base para $\mathrm{Im} f$ consiste de las columnas pivote de la matriz asociada a f.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\mathrm{Im} f = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

- Para calcular una base de $\mathrm{Nuc} f$, partimos de la forma escalonada ya calculada. Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\mathrm{Nuc}\, f = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Para estudiar la inyectividad y sobreyectiva, recordemos que

- Todas la filas de M_f tienen pivote si y solo si f es sobreyectiva
- Todas las columnas de M_f tienen pivote si y solo si f es inyectiva.

De la forma escalonada reducida calculada deducimos que f no es sobreyectiva ni inyectiva.

(b) f tiene representación matricial

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada ya se encuentra en forma escalonada reducida.

- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

- $x_1 + x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Nuc} f = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

  $x_2 = \lambda$

  $x_3 = \mu$

- f no es sobreyectiva ni inyectiva.

6. (a) V. Si g no es inyectiva entonces $g(\bar{u})=\bar{w}$ tiene más de una solución.

(b) V. Si $g(\bar{u})=g(\bar{v})=\bar{w} \Rightarrow$

$$\bar{0}=g(\bar{u})-g(\bar{v})=g(\bar{u}-\bar{v})$$

por tanto $\bar{u}-\bar{v} \in \operatorname{Nuc} g$.

(c) F. Si g no es sobreyectiva entonces g no alcanza todo W.

(d) V. Para definir una aplicación lineal basta con establecer cómo actúa sobre cualquier base. Es precisamente como se describen f y g.

(e) F. Todas las aplicacione lineales cumplen $f(\bar{0})=\bar{0}$. La aplicación nula es solo un caso particular.

(f) F. Toda matriz asociada a una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^5$ tiene

5 columnas. Además,

$5 = \#\text{columnas} = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$

Si $\dim \operatorname{Nuc} f = \dim \operatorname{Im} f$, entonces

$5 = 2 \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 5/2$

lo cual es absurdo.

(g) V. Toda matriz asociada a f tiene 4 columnas. Si $\dim \operatorname{Im} f = 4$, entonces todas las columnas son pivote. Esto implica que $\operatorname{Nuc} f = \{\overline{0}\}$. Por tanto $f(A) = \overline{0}$ tiene una unica solución $A = \overline{0}$.

7. (a) Se pide $M_f^{C,\mathcal{B}}$:

$$M_f^{C,\mathcal{B}} = \left([f(\bar{e}_1)]_C \; [f(\bar{e}_2)]_C \; [f(\bar{e}_3)]_C \right)$$

$$= \left([\bar{u}_1 - \bar{u}_2]_C \; [\bar{u}_2]_C \; [\bar{u}_1]_C \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Recordemos que

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rango} M_f^{C,\mathcal{B}} = \# \text{ pivotes de } M_f^{C,\mathcal{B}}$$

$$M_f^{C,\mathcal{B}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

(c) De la forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= \lambda \end{aligned} \Rightarrow \text{Base de } \operatorname{Nuc} f: \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Estudiamos el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
{[\bar{y}]_C =} \arrow[d, "P_{C\leftarrow C} = I_3"'] & M_f^{C,B} & {[\bar{x}]_B} \\
{[\bar{y}]_C =} & M^{C,\tilde{B}} \arrow[u, phantom, "\boxed{M_f^{C,B}\, P_{B\leftarrow\tilde{B}}} \,=" description] & {[\bar{x}]_{\tilde{B}}} \arrow[u, "P_{B\leftarrow\tilde{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Necesitamos calcular la matriz $P_{B\leftarrow\tilde{B}}$:

$$P_{B\leftarrow\tilde{B}} = \left([\bar{v}_1]_B \quad [\bar{v}_2]_B \quad [\bar{v}_3]_B \right)$$

De las ecuaciones

$$\bar{e}_1 = \bar{v}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \bar{e}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_3$$

Obtenemos

$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{v}_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_3$$

Por tanto $P_{B\leftarrow\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos:

$$M_f^{C,\tilde{B}} = M_f^{C,B} \; P_{B\leftarrow\tilde{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Estudiamos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[\bar{y}]_C} \arrow[dd, "P_{\tilde{C}\leftarrow C}"'] & = M_f^{C,B} & {[\bar{x}]_B} \\
 & \boxed{P_{\tilde{C}\leftarrow C}\, M_f^{C,B}} \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
{[\bar{y}]_{\tilde{C}}} & = M^{\tilde{C},B} & {[\bar{x}]_B} \arrow[uu, "P_{B\leftarrow B} = I_3"']
\end{tikzcd}$$

Ya tenemos la matriz $\underset{\tilde{C}\leftarrow C}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos

$$M_f^{\tilde{C},B} = \underset{\tilde{C}\leftarrow C}{P}\, M_f^{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g) Se nos pide calcular $M_f^{\tilde{C},\tilde{B}}$. Aprovecharemos las cuentas que ya hemos hecho.

Obtendremos $M_f^{\tilde{C},\tilde{B}}$ a partir de $M_f^{C,\tilde{B}}$.

(También se puede obtener de $M_f^{\tilde{C},B}$).

Estudiamos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
{[\bar{y}]_C} \arrow[dd, "P_{\tilde{C}\leftarrow C}"'] & = \; M_f^{C,\tilde{B}} & {[\bar{x}]_{\tilde{B}}} \\
 & \boxed{P_{\tilde{C}\leftarrow C}\, M_f^{C,\tilde{B}}} \arrow[d, equal] & \\
{[\bar{y}]_{\tilde{C}}} & = \; M^{\tilde{C},\tilde{B}} & {[\bar{x}]_{\tilde{B}}} \arrow[uu, "P_{\tilde{B}\leftarrow\tilde{B}} = I_3"']
\end{tikzcd}
$$

Calculamos

$$M_f^{\tilde{C},\tilde{B}} = P_{\tilde{C}\leftarrow C}\, M_f^{C,\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(h) La inyectividad y sobreyectividad se puede estudiar usando cualquiera de las matrices asociadas. Utilizaremos $M_f^{C,B}$.

$$M_f^{C,B} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No todas las filas ni todas las columnas tienen pivotes, por tanto f no es inyectiva ni sobreyectiva.

8. Sea $\mathcal{B}=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base dada. Para estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f, necesitamos estudiar los pivotes de la matriz asociada respecto de la base dada:

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left([f(\bar{e}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(\bar{e}_2)]_{\mathcal{B}} \quad [f(\bar{e}_2)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \left([a\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3]_{\mathcal{B}} \quad [\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3]_{\mathcal{B}} \quad [\bar{e}_1+b\bar{e}_2+\bar{e}_3]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Consideramos los siguientes casos:

- $b=1$:

$\boxed{\text{• } a=1:}$

Un pivote:

No sobreyectiva

No inyectiva.

• $a\neq 1$

Dos pivotes:

No sobreyectiva

No inyectiva

- $b\neq 1$:

• $a=1$:

Dos pivotes

No sobreyectiva

No inyectiva

• $a\neq 1$

Tres pivotes

Sobreyectiva

inyectiva

Resumen: $a \neq 1$ y $b \neq 1 \Rightarrow$ Biyectiva

$a = 1$ o $b = 1 \Rightarrow$ No sobreyectiva

No inyectiva

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Intercambiar fila 1 y fila 3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- fila 2 − fila 1
- fila 3 − a·fila 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 1-a & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Intercambiar fila 2 y fila 3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$